Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije
Zavod za matematiku

MATEMATIČKE METODE U KEMIJSKOM INŽENJERSTVU

-Vibrirajuće membrane-

Studenti: Ana Babić; Hrvoje Šoprek

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

Parcijalne diferencijalne jednadžbe dolaze do izražaja kada su u vezi s različitim fizičkim i geometrijskim problemima, odnosno kada zadana funkcija ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli. Ove varijable mogu biti vrijeme ili neka od koordinata u prostoru.

Slijedeći odlomak odnosit će se na neke od najvažnijih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje se pojavljuju u inženjerskim problemima.

TEORIJSKI KONCEPT

Jednadžba koja uključuje jednu ili više parcijalnih derivacija neke nepoznate funkcije koja sadži dvije ili više nezavisnih varijabli zove se PARCIJALNA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA. Red najviše derivacije naziva se redom jednadžbe.

Kao u slučajevima običnih diferencijalnih jednadžbi, kažemo da je parcijalna diferencijalna jednadžba linearna ako je prvog stupnja zavisne varijable i njenih parcijalnih derivacija.

U svim slučajevima, kada takva jednadžba sadrži zavisnu varijablu ili jednu od njenih derivacija, za jednadžbu tada kažemo da je homogena. Inače je takva jednadžba nehomogena.

Primjer 1. Neke važne linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda:

(1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *jedno-dimenzijska valna jednadžba*

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ *jedno-dimenzijska toplinska jednadžba*

(3) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ *dvo-dimenzijska Laplace-ova jednadžba*

(4) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$ *dvo-dimenzijska Poisson-ova jednadžba*

(5) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ *tro-dimenzijska Laplace-ova jednadžba*

Gdje su: c konstanta, t vrijeme, a x,y,z Kartezijeve koordinate.

Rješenje parcijalnih diferencijalinh jednadžbi nalazi se u području R prostora nezavisne varijable u funkciji koja sadrži sve parcijalne derivacije i zadovoljava jednadžbu svugdje u R.

Generalno, sva rješenja PDJ su vrlo široka.

Jedinstveno rješenje PDJ koje odgovara zadanom fizičkom problemu može se dobiti upotrebom dodatnih informacija koje potječu iz same fizičke situacije.

Npr. U nekim slučajevima bit će dane vrijednosti rješenja problema na granicama neke domene (rubni uvijeti), ili kad je t – vrijeme jedna od varijabli, mogu biti dana rješenja za t=0 (početni uvijeti).

Ako znamo da je obična diferencijalna jednadžba linearna i homogena, tada možemo iz poznatih rješenja doznati i ostala rješenja preko superpozicije. Za homogene linearne PDJ situacija je vrlo slična.

VIBRIRAJUĆE MEMBRANE - DVODIMENZIJSKA VALNA JEDNADŽBA

Kao jedan od važnih problema u području vibracija razmotrit ćemo titranje membrana.

Na početku postavljamo važne pretpostavke:

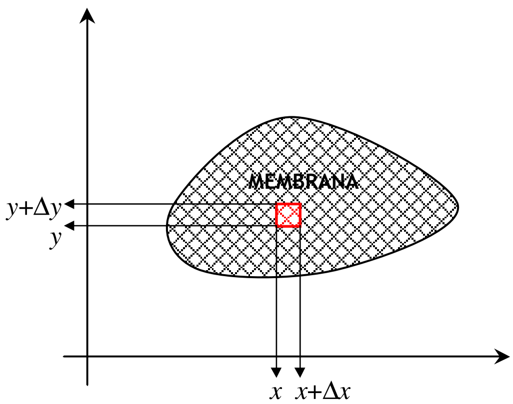
1. masa membrane po jedinici površine je konstantna ⇨ „homogena membrana“ ; membrana je posve fleksibilna i tako tanka da ne pruža nikakav otpor savijanju

2. membrana je raširena i fiksirana preko cijele svoje granice u xy-ravnini ; napetost membrane po jedinici duljine T, koja je posljedica rastezanja membrane, jednaka je u svim točkama i njezin smjer se ne mijenja tijekom vibriranja

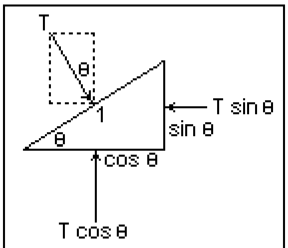
3. otklon u (x,y,z) membrane tijekom vibriranja je malen u usporedbi s veličinom membrane, a svi kutevi nagiba su također maleni

Iako ove pretpostavke ne mogu biti realizirane u praksi, male poprečne vibracije tanke fizičke membrane mogu zadovoljiti s priličnom točnošću ove pretpostavke.

Da bi mogli doći do diferencijalne jednadžbe koja opisuje pomicanje membrane, moramo razmotriti sile koje djeluju na malim dijelovima membrane, kako je to prikazano slikom 1.



Kako su otklon membrane i kutevi nagiba mali, stranice isječka membrane su jednake Δx i Δy. Napetost T je sila po jedinici duljine. Stoga je sila koja djeluje na rubovima isječka aproksimirana $T\Delta x$ i $T\Delta y$. Kako je membrana fleksibilna ove sile su tangencijalne na membranu.



Membrane Tension

Prvo treba razmotriti horizontalne komponente ovih sila. Ove komponente su dobivene množenjem sila s kosinusom kuta otklona. Kako su ti kutevi mali, njihovi kosinusi su jednaki 1. Zato su horizontalne komponente sila na suprotnim stranama približno jednake. Tako je gibanje dijelova membrane u horizontalnom smjeru zanemarivo maleno. Iz ovoga se može zaključiti da se membrana giba transverzalno odnosno da se svaki djelić membrane giba vertikalno.

Vertikalne komponente sila preko krajeva paralelnih s *yu*-ravninom su dakle:

$$T\Delta y \sin\beta \quad \text{i} \quad -T\Delta y \sin\alpha$$

pri čemu negativan predznak označava silu koja je na lijevom kraju okrenuta prema dolje. Kako su kutevi mali, njihove sinuse možemo zamijeniti s tangensima.

Tako je rezultanta tih dviju vertikalnih komponenti:

(1)
$$\begin{aligned} T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) &\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) \\ &= T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)\right] \end{aligned}$$

gdje indeks x označava parcijalnu derivaciju, a y_1 i y_2 su vrijednosti između y i $y+\Delta y$. Slično, rezultante druge dvije nasuprotne strane isječka su:

(2)
$$T\Delta x\left[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)\right]$$

gdje su x_1 i x_2 vrijednosti između x i $x+\Delta x$.

Prema Newton-ovu drugom zakonu, suma sila (1) i (2) je jednaka masi $\rho\,\Delta A$ isječka pomnoženoj s akceleracijom $\partial^2 u/\partial t^2$; ovdje je ρ masa neskrenute membrane po jedinici površine, a $\Delta A = \Delta x \Delta y$ je površina isječka kada je neskrenuta.

Tako je:

$$\rho\Delta x\Delta y\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)\right] + T\Delta x\left[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)\right]$$

gdje je izraz na lijevoj strani procijenjen na nekim pogodnim točkama $(\tilde{x}, \tilde{y})$ koje odgovaraju isječku.

Podijelimo li jednadžbu s $\rho\Delta x\Delta y$, dobit ćemo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right]$$

Ako se Δx i Δy približe 0 tada se dobiva:

(3)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \qquad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

Ova jednadžba naziva se DVODIMENZIJSKA VALNA JEDNADŽBA. Može se izraziti i pomoću Laplace-a $\nabla^2 u$ i tako pisati u obliku:

(3`) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u.$$

PRAVOKUTNE MEMBRANE

Da bi mogli riješiti problem vibrirajuće membrane, moramo odrediti rješenje $u(x,y,t)$ za dvo-dimenzijsku valnu jednadžbu:

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

koja zadovoljava rubne uvjete:

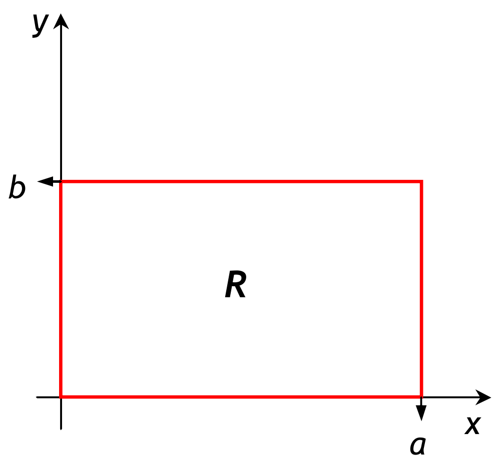
(2) $u = 0$ na granici membrane za sve $t \geq 0$

te početne uvjete:

(3) $u(x,y,0) = f(x,y)$ dan početni pomak $f(x,y)$

(4) $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x,y)$ dana početna brzina $g(x,y)$

Kao prvi važni slučaj treba promotriti pravokutnu membranu R prikazanu na slici 2.



Prvi korak. Pomoću metode razdvajanja varijabli, prvo ćemo odrediti rješenje jednadžbe (1) koje će zadovoljiti uvijet (2). Zato krećemo od:

(5) $$u(x,y,t) = F(x,y)\, G(t)$$

Supstitucijom ovog izraza u jednadžbu (1) imamo:

$$F\ddot{G} = c^2(F_{xx}G + F_{yy}G)$$

gdje indeksi označavaju pacijalne izraze, a točkice derivacije s obzirom na *t*.

Dijeleći obje strane s c^2FG nailazimo na:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}\left(F_{xx} + F_{yy}\right)$$

Zato što funkcija na lijevo ovisi jedino o *t*, dok funkcije na desno ne ovise o *t*, izrazi na obje strane moraju biti jednaki konstanti. Malo istraživanje je pokazalo da samo negativna vrijednost te konstante vodi do rješenja koje zadovoljava (2), a da pri tom nije jednako nuli. Ako tu negativnu konstantu označimo s $-\nu^2$, onda dobivamo:

$$\frac{\ddot{G}}{c^2G} = \frac{1}{F}\left(F_{xx} + F_{yy}\right) = -\upsilon^2 .$$

Ovo povlači dvije diferencijalne jednadžbe:

(6) $$\ddot{G} + \lambda^2 G = 0 \qquad \text{gdje je } \lambda = c\upsilon$$

(7) $$F_{xx} + F_{yy} + \upsilon^2 F = 0$$

Sada možemo razmotriti (7) i upotrijebiti metodu separacije varijabli još jednom tako da determiniramo rješenja jednadžbe (7):

(8) $$F(x,y) = H(x)\ Q(y)$$

Koja iznose nula na granici membrane. Supstitucijom jednadžbe (8) u (7) proizlazi:

$$\frac{d^2H}{dx^2}Q = -\left(H\frac{d^2Q}{dy^2} + \upsilon^2 HQ\right)$$

Ako podijelimo obje strane s *HQ* dobivamo:

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \upsilon^2 Q\right)$$

Funkcija na lijevo ovisi jedino o *x* dok funkcija na desno ovisi jedino o *y*. Zato izraz na obje strane mora biti jednak konstanti. Ta konstanta mora biti negativna, $-k^2$, jer jedino negativne vrijednosti vode rješenju koje zadovoljava (2) bez da je jednako nuli.

$$\frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2} = -\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2} + \upsilon^2 Q\right) = -k^2$$

Ovo izvlači običnu diferencijalnu jednadžbu

(9) $$\frac{d^2H}{dx^2} + k^2H = 0$$

(10) $$\frac{d^2Q}{dy^2} + p^2Q = 0 \qquad \text{gdje je } p^2 = \upsilon^2 - k^2$$

Drugi korak. Generalna rješenja (9) i (10) su:

$$H(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad Q(y) = C\cos py + D\sin py$$

a A,B,C i D su konstante. Iz (5) i (2) izlazi da *F*=*HQ* mora iznositi nula na granici, što odgovara *x*=0, *x*=*a*, *y*=0, te *y*=*b* (slika 2.).

Dakle, uvjeti su slijedeći:

$$H(0)=0, \quad H(a)=0, \quad Q(0)=0, \quad Q(b)=0.$$

Stoga, $H(0) = A = 0$, i, $H(a) = B \sin ka = 0$.

Moramo uzeti u obzir $B \neq 0$ jer je inače $H \equiv 0$ i $F \equiv 0$. Tako je $\sin ka = 0$ ili $ka = m\pi$, odnosno $k = \frac{m\pi}{a}$ (m integral).

Na isti način zaključujemo da je $C=0$, a p mora biti sužen na vrijednosti $p = n\pi/b$ gdje je n integral.

Tako dolazimo do rješenja

$$H_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \qquad Q_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad m = 1,2,\ldots \quad n = 1,2,\ldots$$

Slijedi da je funkcija

$$F_{mn}(x,y) = H_m(x)Q_n(y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\,\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{11}$$
$$m = 1,2,\ldots \quad n = 1,2,\ldots$$

rješenje jednadžbe (7) koje iznosi nula na granici pravokutne membrane.

Kako je $p^2 = \upsilon^2 - k^2$ iz (10) i $\lambda = c\upsilon$ iz (6) imamo

$$\lambda = c\sqrt{k^2 + p^2}\,.$$

Isto tako, $k = m\pi/a$ i $p = n\pi/b$ *odgovara*

$$\lambda = \lambda_{mn} = c\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \qquad m = 1,2,\ldots \quad n = 1,2,\ldots \tag{12}$$

iz (6)

$$G_{mn}(t) = B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t$$

Slijedi da je funkcija $u_{mn}(x,y,t) = F_{mn}(x,y)G_{mn}(t)$ na duljini

$$u_{mn}(x,y,t) = (B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{13}$$

sa λ_{mn} prema (12) slijede da su to rješenja valne jednadžbe (1), koja iznose nula na granici pravokutne membrane. Ove funkcije nazivaju se karakteristične funkcije, a iznosi λ_{mn} se zovu karakteristične vrijednosti vibrirajuće membrane. Frekvencija u_{mn} je $\lambda_{mn}/2\pi$.

Zanimljivo je napomenuti da, ovisno o a i b,nekoliko funkcija može odgovarati istoj karakterističnoj vrijednosti. Fizički to znači da mogu postojati vibracije s istim frekvencijama, ali različitim krivuljama u području točki koje su nepomične.

Treći korak. Da bismo mogli dobiti rješenje koje također zadovoljava početne uvjete (3) i (4) moramo razmotriti slijedeće dvije serije:

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x,y,t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t + B^*_{mn}\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \tag{14}$$

Iz ove jednadžbe i iz (3) dobivamo

$$u(x,y,0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} = f(x,y) \tag{15}$$

Ove serije nazivaju se duple Fourier-ove serije. Ako pretpostavimo da se *f(x,y)* mogu razviti u takve serije tada Fourier-ove koeficijente B_{mn} za *f(x,y)* iz (15) možemo odrediti pomoću

(16) $$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

pa (18) možemo pisati

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} K_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}$$

Za fiksni *y* ovo su Fourier-ove sinusne serije za *f(x,y),* smatramo ih funkcijama *x* , pa iz (4) slijedi da su koeficijenti ove ekspanzije

(17) $$K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx$$

Nadalje, (16) je Fourier-ova sinusna serija za $K_m(y)$ pa su iz (4) koeficijenti

$$B_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \; .$$

Iz ove i (17) dolazimo do generalizirane Euler-ove formule

(18) $$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy \qquad m=1,2,... \quad n=1,2,...$$

za Fourier-ove koeficijente za *f(x,y)* u duplim Fourier-ovim serijama (15).

B_{mn} iz (14) je sada određen za *f(x,y)*. Da bismo odredili B^*_{mn} moramo diferencirati izraz (14) po *t* i koristeći izraz (4) dobivamo:

$$\left. \frac{\delta u}{\delta t} \right|_{t=0} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B^*_{mn} \lambda_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = g(x,y)$$

Pretpostavljamo da *g(x,y)* mogu biti prevedeni u duple Fourier-ove serije. Tada dobivamo

(19) $$B^*_{mn} = \frac{4}{ab\lambda_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x,y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy \qquad m=1,2,... \quad n=1,2,...$$

Rezultat je taj da bi jednadžba (14) zadovoljila početne uvjete, koeficijenti B_{mn} i B^*_{mn} moraju biti izabrani prema izrazima (18) i (19).